المحاضرة الرابعة

الاثنين في / 2 / 4 / 2018م

• **البيانين المتقاطعين:**

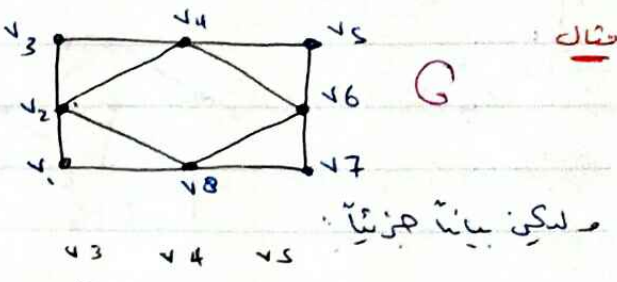
لتكن لدينا G_1 ، G_2 بيانين جزئيين من البيان G بحيث أن $V(G_1)\cap V(G_2)\neq\phi$ أي أن لديه رؤوس مشتركة بينهما.

تقاطع البيانين G_1, G_2 هو رمز له بـ $G_1\cap G_2$ وهو بيان جزئي من البيان G

له مجموعة الرؤوس $V(G)=V(G_1)\cap V(G_2)$

وله مجموعة الأضلاع $E(G)=E(G_1)\cap E(G_2)$

مثال: G



ولدينا بيانات جزئية:

G_1 بيان جزئي من G

(v_3 v_4 v_5 v_6 v_7 v_8)

G_2 بيان جزئي من G أيضاً

(v_5 v_6 v_7 v_8 v_1)

تقاطع البيانين هو بيان جزئي له مجموعة الرؤوس

وهو بيان جزئي من البيان G

$G_1\cap G_2$ → (v_5 v_6 v_7 v_8)

• **تقليص البيان:** لتكن لدينا البيان $G(V, E)$ رتبته p وقياسه q ولتكن u, v رأسين في هذا البيان و e الضلع الواصل بينهما

إن تقليص الضلع يعني حذفه

(u e v) G

• لتكن $u,v\in V(G)$ ولتكن $e=uv\in E(G)$

و e الضلع الواصل بينهما، إن تقليص الضلع e يعني حذفه ومطابقة الرأسين u, v ليشكلان رأساً واحداً يجاور رأسين الرأسين v, u

التقليص: (u)

وحذف الأضلاع المضاعفة التي تجاور أي من الرأسين

• **متمم البيان:**

لتكن لدينا البيان $G(V,E)$ رتبته p وقياسه q

ان متمم البيان نرمز له بالرمز $\bar{G}$ هو متمم للبيان G له مجموعة الرؤوس $V(G)$ ومن أجل أي رأسين $u,v\in V(G)$ يكون الضلع الواصل بينهما $e=uv\in E(\bar{G})$ إذا وفقط إذا كان $e\notin E(G)$

مثال 1: لتكن لدينا البيان G

(v_1 v_2 v_3 v_4 v_5) G

(v_1 v_2 v_3 v_4 v_5) $\bar{G}$ البيان المتمم

مثال 2

/ /

v_3 v_4 v_2 v_1 G

المتمم $\bar{G}$

ملاحظة: البيان المتمم للبيان التام هو بيان فارغ

أي أن

تام G

المتمم $\bar{G}$

ملاحظة: البيان المتمم للبيان المنتظم هو بيان منتظم

منتظم $r = 2$ ، $r = 1$ درجة الرأس

ملاحظة: اذا كانت $G_1 \cong G_2$ فإن

$L(G_1) \cong L(G_2)$

اذا كان لدينا بيانين متماثلين فالمتمم ل بيان متماثل

مثال: اذا كان G بيان متممه $\bar{G}$ فإن

$q + \bar{q} = p(p-1)/2$

اذا كان:

$G(p,q) \longrightarrow \bar{G}(p,\bar{q})$

أي أن مجموعة أضلاع البيان + مجموعة أضلاع البيان المتمم = ...

• **متتالية الدرجة:**

ليكن لدينا البيان $G(V,E)$ رتبته p وحجمه q وليكن مجموعة الرؤوس

$V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$

وليكن

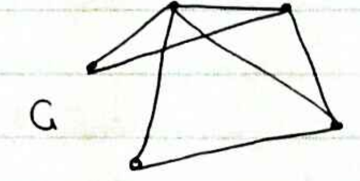
$\rho(v_i) = d_i \geq 0 \quad : \quad 1 \le i \le p$

تسمى المتتالية $d_1, d_2, \ldots, d_p$ (درجة الرأس) متتالية الدرجة للبيان G ونرمز لمتتالية الدرجة بالرمز $S: d_1, d_2, \ldots, d_p$

وهي متتالية درجات الرؤوس.

مثال: لتكن لدينا متتالية الدرجة $S: 4,3,3,2,2$

عندئذٍ البيان الذي يمثل هذه المتتالية يعطى بالشكل



G

ملاحظة: هل كل متتالية درجة تمثل بيان يمكن رسمه؟

في الواقع ليس كل متتالية درجة تمثل بيان يمكن رسمه

مثال: لتكن لدينا متتالية الدرجة $S: 3,3,3,1$

هذا البيان لا يمكن رسمه

ملاحظة: اذا كانت المتتالية $S: d_1, d_2, \ldots, d_p$ متتالية درجة ووجد بياناً يمثلها، عندئذٍ نقول عن متتالية الدرجة S إنها قابلة للرسم.

• اذا كانت لدينا متتالية درجة S تساوي $S: d_1, \ldots, d_p$ هناك بعض الشروط التي يجب تحققها حتى تكون S قابلة للرسم:

1- درجة درجات الرؤوس: $0 \le d_i \le p-1$ (p عدد الرؤوس)

2- مجموع درجات الرؤوس $\sum d_i$ هو عدد زوجي

مبرهنة (هافل - هاكيمي):

لتكن المتتالية $S: d_1, d_2, \dots d_p$ غير سالبة

حيث أن $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$

أي أن درجة كل رأس أكبر أو يساوي درجة الرأس الذي يليه أي $d_i \geq d_{i+1}$

و $d_1 \geq 1$ وليكن $p \geq 2$

تكون S قابلة للرسم ⟺ كانت المتتالية المكافئة

(نحذف الحد الأول ونحذف 1 من بقية الحدود)

$S: d_{2-1}, d_{3-1}, \dots d_{p-1}$

الخوارزمية:

اختبار قابلية الرسم:

- **المعطيات:** المتتالية $S: d_1, \dots d_p$ من الأعداد الصحيحة غير السالبة.
- **المخرجات:** تحديد فيما اذا كانت S قابلة للرسم.
- **الخطوات:**

1. اذا كان $d_i > p-1$ و $(i=1,\dots,p)$ تكون S غير قابلة للرسم وإلا انتقل للخطوة التالية
2. اذا كانت جميع عناصر S تساوي أصفار تكون S قابلة للرسم.
3. اذا كانت S تحتوي على عناصر سالبة تكون غير قابلة للرسم.
4. رتب عناصر S بشكل متناقص من الأكبر للأصغر اذا كان ذلك ضروريا.
5. احذف أول عنصر d_1 من المتتالية ثم انقص واحد من d_1 عنصر بعد العنصر المحذوف ثم اذهب للخطوة التالية

تمرين: لتكن لدينا المتتالية

$S: 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1$

الخطوات في الخوارزمية السابقة من 2 ← 5 تتكرر على شكل حلقة وذلك كما يلي:

$S_1: 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1$

$S_2: 3, 2, 2, 1, 1, 1$ → لا نفرض ترتيبها

$S_3: 1, 1, 0, 1, 1$ → لا نضع الترتيب

$S_3: 1, 1, 1, 1, 0$ رتب

$S_4: 0, 1, 1, 0$

$S_4: 1, 1, 0, 0$ رتب

$S_5: 0, 0, 0$

S_5 تتكون من أصفار ⟸ قابلة للرسم والبيانات التي تمثل متتالية الدرجة هي:

S_5: 3 رؤوس فارغة

S_4:

S_3:

S_2:

S_1:

• مبرهنة (إردوس - كالاي):

لتكن المتتالية $S: d_1, d_2, \dots, d_p$ حيث $d_i \ge d_{i+1}$

عندئذٍ تكون S متتالية للرسم إذا وفقط إذا كان:

① $\sum_{i=1}^{p} d_i$ عدد زوجي.

② لأجل كل عدد صحيح k حيث $1 \le k \le p$ يكون

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{p} \min(k, d_i)$$

مثال: لتكن لدينا متتالية الدرجة

$S: 5, 4, 3, 3, 2, 2, 1$

أوجد في المثال إن كانت متتالية للرسم لتحقق الشرط

1- $\sum_{i=1}^{p} d_i = 5+4+\dots = 20$

وهو عدد زوجي ⇐ الشرط الأول محقق.

2-

1) $k=1 \Rightarrow d_1 = 5 \le 1(1-1) + \sum_{i=2}^{7} \min(1, d_i)$

$= 0+1+1+1+1+1+1 = 6$

$\Rightarrow 5 \le 6$ محقق

2) $k=2 \Rightarrow d_1 + d_2 = 5+4 = 9 \le 2(1) + \sum_{i=3}^{7} \min\{2, d_i\}$

$= 2+2+2+2+2+1 = 11$

$\Rightarrow 9 \le 11$ محقق

3) $k=3 \Rightarrow d_1+d_2+d_3 = 12 \le 3(2) + \sum_{i=4}^{7} \min(3, d_i) = 6+3+2+2+1 = 14$

$\Rightarrow 12 \le 14$ محقق

4) $k=4 \Rightarrow d_1+d_2+d_3+d_4 = 15 \le 4(3) + \sum_{i=5}^{7} \min(4, d_i)$

$= 12+5 = 17 \Rightarrow 15 \le 17$ محقق

5) $k=5 \Rightarrow d_1+\dots+d_5 = 17 \le 5(4) + \sum_{i=6}^{7} \min(5, d_i)$

$= 20+2+1 = 23 \Rightarrow 17 \le 23$

6) $k=6 \Rightarrow d_1+\dots+d_6 = 19 \le 6(5) + \sum_{i=7}^{7} \min(6, d_i) = 30+1 = 31$

⇐ الشرط الثاني محقق $\sum d_i \le k(k-1) + \dots$

وبالتالي S متتالية للرسم.

• البيان الموجه:

تعريف: ذكرنا سابقاً أنه إذا كان لدينا بيان غير موجه الأضلاع فإننا نسميه بالبيان بينما البيان الموجه هو بيان موجهة الأضلاع أي كل ضلع موجه من الرأس إلى الرأس مع مراعاة الاتجاهية وهو إذا تكرر الضلع بين الرأسين وفي اتجاهين مختلفين.

• نسمي كل ضلع في البيان الموجه بضلع موجه أو قوس ويمكن أن يوجد ضلع موجه بين الرأس ونفسه عندئذٍ نسميه عروة موجهة.

• نرمز للبيان الموجه بالرمز $D(V, A)$

مجموعة الرؤوس $V(D) = \{v_1, \dots, v_p\}$

لذلك إذا كان لدينا بيان مجموعة رؤوسه p وعدد الأضلاع q نرمز للبيان الموجه بالرمز $D(p, q)$ أو بالرمز $D(V, A)$

• تعريف:

ليكن $D(V, A)$ بيان موجه رتبته p وقياسه q

المحاضرة الخامسة :

الاثنين 9 / 4 / 2018 م.

نقول عن الرأسين u, v أنهما متجاوران إذا كانت الثنائية $e = (u, v) \in A(D)$

أي ضلع موجه يصل بين الرأسين.

• $(u, v) \neq (v, u)$ في البيان الموجه

ونقول أن القوس e بداية الرأس u ونهايته الرأس v وأن الرأسين u, v يقعان على القوس e.

الدرجة الداخلية والدرجة الخارجية للرأس v :

• الدرجة الخارجية للرأس v : تمثل عدد الأضلاع الموجهة الخارجة من الرأس v ، ونرمز لها بالرمز:

$\rho^{+}(v)$ أو $od(v)$ بالإضافة للعروات الموجهة ودرجتها = 2

• الدرجة الداخلية للرأس v: هو عدد الأضلاع الموجهة الداخلة للرأس v ونرمز له بالرمز: بالإضافة للعروات الموجهة = 2

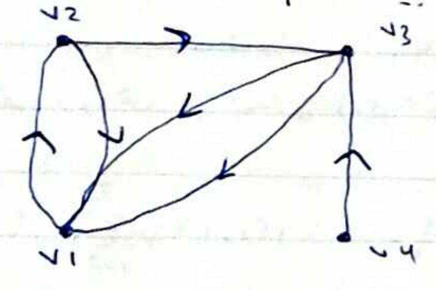
$\rho^{-}(v)$ أو $id(v)$

• درجة الرأس v هو مجموع الدرجتين الداخلية والخارجية أي :

$$\rho(v) = \rho^{+}(v) + \rho^{-}(v)$$

أو $deg(v) = od(v) + id(v)$

مثال : لديكن البيان G المجاور :



• $od(v_1) = 1$, $id(v_1) = 3$

$\Rightarrow deg(v_1) = 4$

• $od(v_2) = 2$, $id(v_2) = 1$

$\Rightarrow deg(v_2) = 3$

• $od(v_3) = 2$, $id(v_3) = 2$

$\Rightarrow deg(v_3) = 4$

• $od(v_4) = 1$, $id(v_4) = 0$

$\Rightarrow deg(v_4) = 1$